חדו"א 2 - תרגיל מס' 2

תרגילים להגשה

1. (א) הגדירו את המושג סכום דרבו תחתון.

(ב) הוכיחו כי בהינתן פונקציה חסומה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וחלוקה $\Pi=\{x_0,\dots,x_n\}$ מתקיים:

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}} S(f,\Pi,\{t_i\})$$

2. פרקו את הפונקציות הרציונליות הבאות לפונקציות רציונליות יסודיות:

(א) $\dfrac{x^4-3x^3+x^2+4x-1}{x^2-x-1}$

(ב) $\dfrac{x^n}{x-1}\quad (n\in\mathbb{N})$

(ג) $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$

3. חשבו את האינטגרלים הבאים.

(א) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$ באשר $n>1$ טבעי, $A\in\mathbb{R}$.

(ב) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$

(ג) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-6}$

(ד) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x^2-1)^2}\,dx$

(ה) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

(ו) $\displaystyle\int \sin(ax)\cos(bx)dx$

(ז) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

(ח) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (|x| > |a| > 0)$

(נסו $x = \frac{a}{\cos t}$)

(ט) $\int \frac{2x - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{x - 1} dx$

(י) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^{10} - 2}} dx$

4. אינטגרלים של פונקציות היפרבוליות: נגדיר **סינוס היפרבולי** ו**קוסינוס היפרבולי** -

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(א) הוכיחו את הזהויות הבאות:

i. $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$

ii. $\cosh 2x = 2(\sinh x)^2 + 1 = 2(\cosh x)^2 - 1$

iii. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(ב) חשבו את הנגזרות של $\sinh x, \ \cosh x$ (בטאו אותן באמצעות הפונקציות ההיפרבוליות עצמן).

(ג) חשבו את האינטגרלים הבאים:

i. $\int (\cosh x)^2 dx$

ii. $\int (\cosh x)^3 dx$

iii. $\int (\sinh x)^3 \cosh x dx$

(ד) השתמשו בהצבה $x = \sinh t$ על מנת לפתור את האינטגרל $\int \sqrt{1 + x^2} dx$.

תרגילים נוספים

1. פרקו את הפונקציות הרציונליות הבאות לפונקציות רציונליות פשוטות:

(א) $\frac{x^5 - 3x^3 + x}{x^2 + 2x + 1}$

(ב) $\frac{1}{(x - a)(x^2 + px + q)} \quad (p^2 - 4q < 0)$

(ג) $\frac{x - 1}{x^3(x^2 + 1)}$

2. חשבו את האינטגרלים הבאים. 2

(א) $$\int \frac{dx}{2x^2+3x+2}$$

(ב) $$\int \frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$$

(ג) $$\int \frac{dx}{x(x^2+4x+5)^2}$$

(ד) $$\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 2}\,dx$$

(ה) $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$$

(ו) $$\int \tan^4 x\,dx$$

(ז) $$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}\,dx$$